

بسمه تعالی»

نام و نام خانوادگی		ساعت شروع : ۷:۳۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون پایانی نوبت اول: آمار و احتمال
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه		تاریخ امتحان ۱۴۰۴/۱۱/۰۷	تعداد صفحه: ۲	دبیرستان دوره دوم باقرالعلوم (ع)
ردیف	همه پاسخ ها را فقط با خودکار مشکی یا آبی و در کادر مشخص شده در پاسخبرگ بنویسید.			
نمره				
۱	درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) گزاره $q \Rightarrow p$ وقتی نادرست می شود که هم p و هم q نادرست باشند. ب) گزاره $A \not\subseteq B$ با گزاره $\exists x; (x \in A \vee x \notin B)$ هم ارز است. پ) اگر $A = \{x, \{x\}\}$ و $B = \{\{x, \{x\}\}\}$ آن گاه $A \cap B = \emptyset$. ت) علم احتمال شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم است.			
۲	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید: الف) در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، گزاره p را و گزاره q را تالی یا پیرو گویند. ب) تعداد اعضاء مجموعه های توانی مجموعه $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ برابر است. پ) اگر هر یک از مجموعه A ، B و $A \cap B$ به ترتیب ۷، ۵ و ۲ عضو داشته باشند آن گاه $(A - B) \times (B - A)$ به تعداد زوج مرتب خواهد داشت. ت) هر زیرمجموعه تک عضوی از یک فضای نمونه ای را یک پیشامد گویند.			
۳	درستی هم ارزی زیر را با استفاده از جدول نشان دهید: $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv \sim q$			
۴	دو گزاره زیر داده شده اند: $I) \forall x \in \mathbb{R}; x^2 > x$ $II) \exists x \in \mathbb{N}; (x^2 = x) \wedge (\frac{x+4}{5} \in \mathbb{N})$ الف) ارزش درستی هر یک از دو گزاره را تعیین کنید. ب) نقیض هر یک از گزاره های داده شده را به زبان ریاضی بنویسید.			
۵	تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $2 + k$ عضوی از تعداد زیرمجموعه های سره مجموعه k عضوی به تعداد ۴۹ واحد بیش تر است. k را محاسبه کنید.			
۶	اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ باشد، آن گاه تعداد اعضاء $[P(A) - A]$ را محاسبه کنید که در آن $P(A)$ مجموعه توانی مجموعه A است.			
۷	اگر U مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آن گاه حاصل هر یک از تساوی های زیر را بنویسید: الف) $A \cap (A' \cup U) = \dots\dots\dots$ ب) $(A - B) \cap (B - A) = \dots\dots\dots$ پ) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = \dots\dots\dots$ ت) $(A' \cap B')' \cap (A \cap B) = \dots\dots\dots$			
۱/۵	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها تساوی زیر را ثابت کنید: $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$			
۱/۵	اگر $A = [-2, 5]$ و $B = \{1, 2, 5\}$ آن گاه $(A \times B) - (B \times A)$ را در نمودار مختصات دکارتی رسم کنید.			
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»				

ردیف	سؤالات پاسخ‌نامه دارد.	نمره
۱۰	اگر مجموعه‌های A و B و C به صورت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ تعریف شده باشند، آن‌گاه درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید: الف) زوج مرتب $(1, 7)$ در $(A \times B) - (A \times C)$ عضویت دارد. ب) تعداد اعضاء $(A \times A) - (B \times B)$ برابر صفر است. پ) $A \times (B \cap C)$ با $(A \times B) \cap (A \times C)$ برابر است.	۱/۵
۱۱	هر یک از موارد زیر را تعریف کنید: الف) برآمد ب) دو پیشامد ناسازگار	۱
۱۲	اگر پیشامدهای A و B چنان باشند که $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ آن‌گاه حاصل $P(A' \cap B')$ را بیابید.	۱
۱۳	از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۸۰ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم: الف) احتمال آن‌را بیابید که آن عدد حداقل بر یکی از دو عدد ۴ یا ۶ بخش‌پذیر باشد. ب) آن عدد بر ۴ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد.	۱/۵
۱۴	یک سکه و یک تاس با هم پرتاب می‌شوند. مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی ب) پیشامد A آن که سکه پشت یا تاس ۵ بیاید.	۱/۵
۱۵	در یک تجربه تصادفی $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای بوده و $P(a)$ ، $P(b)$ ، $P(c)$ و $P(d)$ به همان ترتیب تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{15}$ را می‌دهند. $P(\{a, c\})$ را بیابید.	۱/۵
۱۶	در پرتاب یک سکه، احتمال آمدن «رو» چهار برابر احتمال آمدن «پشت» است. احتمال آمدن «پشت» را محاسبه کنید.	۱
	«موفق و پیروز باشید.»	جمع نمره
		۲۰

پاسخ سؤال ۱:

(هر مورد ۰/۲۵ نمره)

الف) نادرست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

پاسخ سؤال ۲:

(هر مورد ۰/۲۵ نمره)

الف) مقدم ب) ۸ پ) ۱۵ ت) ساده

پاسخ سؤال ۳:

(رسم کامل جدول ۱ نمره)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

پاسخ سؤال ۴:

الف) I نادرست II درست (هر مورد ۰/۵ نمره)

ب) I) $\exists x \in \mathbb{R}; x^7 \leq x$ (۰/۵)

II) $\forall x \in \mathbb{N}; (x^7 \neq x) \vee (\frac{x+4}{5} \notin \mathbb{N})$ (۰/۵)

پاسخ سؤال ۵:

$$\underbrace{2^{k+2} = (2^k - 1) + 49}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{2^k (2^2 - 1) = 48}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{2^k = 16}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{k = 4}_{(۰/۲۵)}$$

پاسخ سؤال ۶:

(اشاره به این که $P(A)$ دارای ۸ عضو است ۰/۲۵ نمره)

$$|P(A) - A| = |P(A)| - |P(A) \cap A| = 2^3 - |\{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}| = 8 - 2 = 6$$

(به دست آوردن عدد ۶ در انتها ۰/۷۵ نمره)

پاسخ سؤال ۷:

(هر مورد ۰/۲۵ نمره)

الف) A ب) $\emptyset$ پ) A ت) $A \cap B$

پاسخ سؤال ۸:

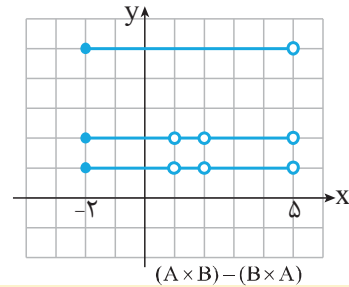
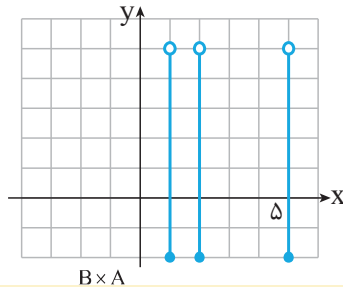
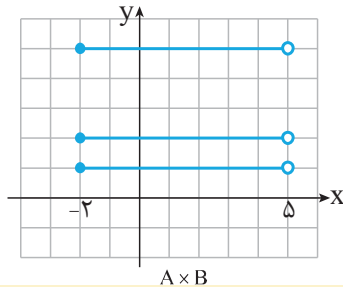
$$\begin{aligned} \text{سمت چپ} &= \underbrace{(A \cap B') \cup (B \cap A')}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{[A \cup (B \cap A')] \cap [B' \cup (B \cap A')]}_{(۰/۵)} = \underbrace{[A \cup B] \cap [B' \cup A']}_{(۰/۲۵)} \\ &= \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cap B)'}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{(A \cup B) - (A \cap B)}_{(۰/۲۵)} = \text{سمت راست} \end{aligned}$$

پاسخ سؤال ۹:

رسم جواب نهایی ۱/۵ نمره کامل به شرطی که نقاط توپر و توخالی به درستی رسم شده باشند.

اگر هر یک از دو نمودار $A \times B$ یا $B \times A$ رسم شده باشند، ولی جواب نهایی رسم نشده باشد به هر کدام ۰/۵ نمره اختصاص یابد.

«راهنمای تصحیح آزمون»



پاسخ سؤال ۱۰:

(هر مورد ۵/۵ نمره)

پ (درست)

ب (نادرست)

الف (درست)

پاسخ سؤال ۱۱:

الف) هر عضوی از فضای نمونه را برآمد گویند. (۵/۵ نمره)

ب) دو پیشامدی که اشتراکشان تهی باشد. (۵/۵ نمره)

پاسخ سؤال ۱۲:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{12}$$

(۵/۲۵) (۵/۵) (۵/۲۵)

اگر از طریق نمودار ون هم به جواب درست رسیده باشد نمره کامل خواهد گرفت.

پاسخ سؤال ۱۳:

الف) $P(4 \cup 6) = P(4) + P(6) - P(4 \cap 6) = \frac{20}{80} + \frac{13}{80} - \frac{6}{80} = \frac{27}{80}$

(۵/۲۵) (۵/۵)

ب) $P(4 \cap 6') = P(4) - P(4 \cap 6) = \frac{20}{80} - \frac{6}{80} = \frac{14}{80} = \frac{7}{40}$

(۵/۲۵) (۵/۵)

پاسخ سؤال ۱۴:

الف) $S = \{(1, پ), (1, ر), (2, پ), (2, ر), (3, پ), (3, ر), (4, پ), (4, ر), (5, پ), (5, ر), (6, پ), (6, ر)\}$ (۷۵/۵)

ب) $A = \{(1, پ), (2, پ), (3, پ), (4, پ), (5, پ), (6, پ), (5, ر)\}$ (۷۵/۵)

پاسخ سؤال ۱۵:

$$P(b) = P(a) + \frac{1}{15}, P(c) = P(a) + \frac{2}{15}, P(d) = P(a) + \frac{3}{15}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(a) + [P(a) + \frac{1}{15}] + [P(a) + \frac{2}{15}] + [P(a) + \frac{3}{15}] = 1 \quad (۷۵/۵)$$

$$\Rightarrow 4P(a) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(a) = \frac{3}{20} \quad (۲۵/۵)$$

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = \frac{3}{20} + [\frac{3}{20} + \frac{2}{15}] = \frac{13}{20} \quad (۵/۵)$$

پاسخ سؤال ۱۶:

$$\left. \begin{aligned} P(رو) &= 4P(پشت) \\ P(رو) + P(پشت) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (۵/۵) \Rightarrow 5P(پشت) = 1 \Rightarrow P(پشت) = \frac{1}{5} \quad (۵/۵)$$