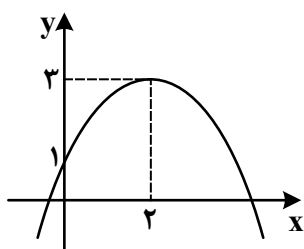


«بسمه تعالی»

نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون پایانی نوبت اول: حسابان ۱	
مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۱۰/۰۸	تعداد صفحه: ۲	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه باقرالعلوم	
بارم	«سوالات»			ردیف	
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع نه جمله اول دنباله با جمله عمومی $t_n = 2^{n-1}$ ، برابر ۲۵۵ است. ب) مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ از حاصلضرب آن‌ها یک واحد بیشتر است. پ) توابع $f(x) = \sqrt{x^3}$ و $g(x) = x\sqrt{x}$ با هم برابرند. ت) تابع $f(x) = \sqrt{x} - 1 $ ، تابعی وارون‌پذیر است.			۱	
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x + 5} + 1 = 0$ برابر است. ب) معادله درجه دوم دارای ریشه‌های $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است. پ) حاصل عبارت $A = [\sqrt[3]{-9}] + [\sqrt[3]{65}]$ برابر است. ([] نماد جزء صحیح است). ت) در تابع $f(x) = (1 - 3x)^3$ حاصل $(f^{-1} \circ f)(2)$ برابر است.			۲	
۱/۵	اگر $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $x^3 + 3x^2 - 4x + k = 0$ باشد، با حل معادله، سایر ریشه‌های آن را بیابید.			۳	
۲	«میعاد» کاری را به تنهایی ۵ ساعت زودتر از «رادمان» انجام می‌دهد، اگر هر دو نفر با هم کار کنند، آن کار را در ۶ ساعت انجام می‌دهند، این دو نفر هریک به تنهایی این کار را در چه زمانی انجام می‌دهند؟			۴	
۲	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - x$ را رسم کرده و سپس معادله $f(x) = 3$ را به روش هندسی حل کنید.			۵	
۱				۶	
۱	خط $x - 2y = 2$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-1, 1)$ مماس است. مساحت این دایره را بیابید.			۷	
۱/۵	نقطه‌ای را روی محور x ها بیابید که فاصله آن از نقطه $P(3, 4)$ برابر با ۶ باشد. مسئله چند جواب دارد؟			۸	
۱	نمودار تابع زیر را در فاصله $[0, 4]$ رسم کنید. $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right] - 1$			۹	

۱	ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 4x - 1$ را با شرط $x < -2$ بیابید.	۱۰
۱	تابع $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ و وارون آن را در یک دستگاه رسم کنید.	۱۱
۱	آیا توابع f و g ، باهم برابرند؟ (دلیل پاسخ خود را بنویسید). $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}, g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$	۱۲
۱/۵	الف) اگر توابع f و g به صورت $f(x) = 2x - 10$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ باشند، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید. ب) اگر $f = \{(-4, 2), (-1, 4), (1, 9), (4, 10)\}$ و $g(x) = \frac{3x^2 + 12}{x^2 - 16}$ باشند، تابع $f + g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.	۱۳
۱/۵	الف) اگر $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ باشند، مطلوبست: ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید.	۱۴
۲	الف) نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و بُرد آن را بنویسید. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$	۱۵
۲۰	جمع	«موفق باشید»

پاسخ سوال ۱:

الف) نادرست (۰/۲۵)

$$t^n = r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = r^0 = 1 \\ q = r \end{cases} \Rightarrow S_q = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (2^9 - 1)}{2 - 1} = 511$$

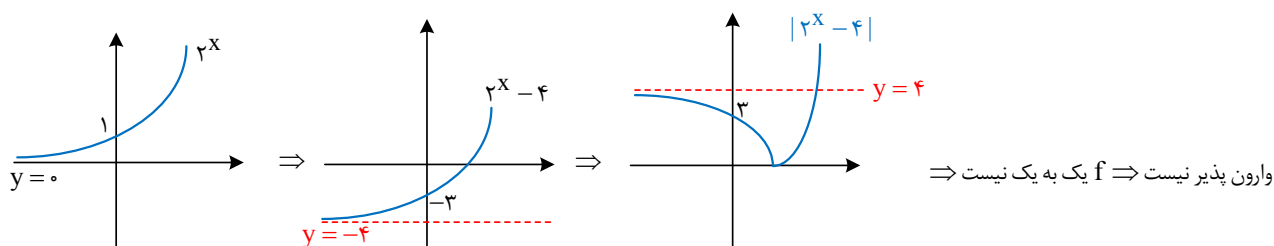
ب) درست (۰/۲۵)

$$S = \frac{1}{r}, P = -\frac{1}{r} \Rightarrow S - P = 1$$

پ) درست (۰/۲۵)

$$\left. \begin{aligned} D_f : x^3 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 0, D_g : x \geq 0 \Rightarrow D_f = D_g \\ \text{برای ضابطه ها: } f(x) = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2} \cdot x = |x| \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x} = g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

ت) نادرست (۰/۲۵)



پاسخ سوال ۲:

الف) صفر (۰/۲۵) (جمع در عبارت نامنفی به اضافه ۱ هیچگاه برابر صفر نمی شود.)

ب) $x^2 - x - 1 = 0$ (به ازای تمام معادله ها به شکل $a(x^2 - x - 1) = 0$ به شرط $a \neq 0$, پاسخ صحیح است.)

$$A = \underbrace{[\sqrt[3]{65}]}_{4/-} + \underbrace{[\sqrt[3]{-9}]}_{-3/-} = 4 + (-3) = 1 \quad \text{پ) ۱ (۰/۲۵)}$$

$$f^{-1}(f(2)) = 2 \quad \text{ت) ۲ (۰/۲۵)}$$

پاسخ سوال ۳:

$x = -2$ یکی از ریشه های معادله است.

$$x^3 + 3x^2 - 4x + k = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow -8 + 12 + 8 + k = 0 \Rightarrow k = -12 \quad (۰/۵)$$

$x + 2$ یکی از عامل های عبارت سمت چپ تساوی است.

$$\underbrace{(x+2)(x^2+x-6)}_{(۰/۵)} = 0 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \quad (۰/۵)$$

پاسخ سوال ۴:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ساعت } x = \text{کار میعاد} \\ \text{ساعت } x+5 = \text{کار رادمان} \\ \text{ساعت } 6 = \text{کار هر دو باهم} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 12x + 30 \Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \checkmark \\ \text{غ ق} \end{array}$$

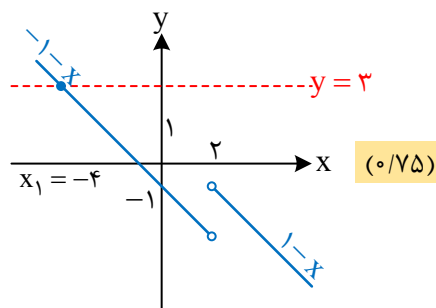
⇐ این کار برای میعاد ۱۰ ساعت و رادمان ۱۵ ساعت به تنهایی طول می کشد. (۰/۵)

پاسخ سوال ۵:

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} - x = \frac{|x-2|}{x-2} - x = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} - x = 1-x & ; x > 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2} - x = -1-x & ; x < 2 \end{cases}$$

$$-1-x=3 \rightarrow x=-4 \quad (0/25)$$

مطابق شکل مقابل می بینیم که این معادله فقط یک ریشه دارد که:



پاسخ سوال ۶:

طبق شکل سهمی، رأس سهمی است و معادله استاندارد سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ است که $S(h, k)$ رأس سهمی است؛ بنابراین: $y = a(x-2)^2 + 3$ (۰/۵) که البته a را نداریم و:

$$\begin{array}{l} \text{سهمی } (0, 1) \in \\ \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 1 = a(0-2)^2 + 3 \Rightarrow -2 = 4a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 \end{array} \quad (0/5)$$

راه حل دوم:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a, c = 1 \xrightarrow{(0/25)} f(x) = ax^2 - 4ax + 1 \xrightarrow{(2,3)} 3 = 4a - 8a + 1$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \quad (0/25)$$

$$(0/25)$$

$$(0/25)$$

پاسخ سوال ۷:

فاصله مرکز دایره از این خط برابر طول شعاع دایره است.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 2 = 0 \\ O(-1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow OH = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (0/25)$$

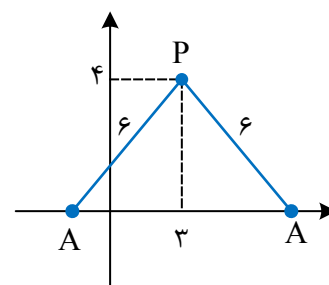
$$\Rightarrow R = \sqrt{5} \Rightarrow S = \pi R^2 = 5\pi \quad (0/25)$$

پاسخ سوال ۸:

آن نقطه روی محور x ها را $A(\alpha, 0)$ می‌نامیم، پس می‌خواهیم $AP = 6$ باشد:

$$AP = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (0 - 4)^2} = 6 \xrightarrow{\text{توان}} (\alpha - 3)^2 + 16 = 36 \Rightarrow (\alpha - 3)^2 = 20 \quad (0/5)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} |\alpha - 3| = \sqrt{20} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = \sqrt{20} \Rightarrow \alpha = 3 + \sqrt{20} \Rightarrow A \left| 3 + \sqrt{20} \right. \\ \alpha - 3 = -\sqrt{20} \Rightarrow \alpha = 3 - \sqrt{20} \Rightarrow A \left| 3 - \sqrt{20} \right. \end{cases} \quad (0/25)$$

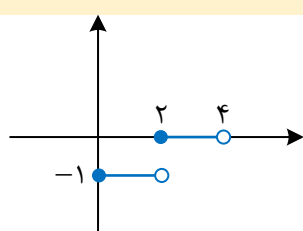


پس برای نقطه A ، دو جواب مختلف بدست آمد. $(0/25)$

برای حل این مسئله می‌توانستیم از قضیه فیثاغورس نیز استفاده کنیم.



پاسخ سوال ۹:



$(0/5)$

$$f(x) = \left[\frac{x}{2} \right] - 1 = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq x < 4 \end{cases} \quad (0/25)$$

$(0/25)$

پاسخ سوال ۱۰:

$$y = x^2 + 4x - 1 \Rightarrow y = (x + 2)^2 - 5 \quad (0/25)$$

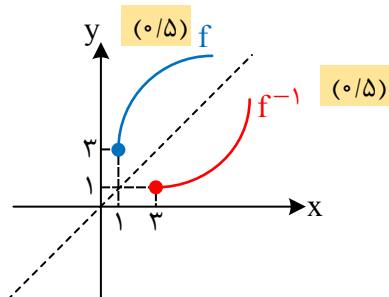
$$\Rightarrow y + 5 = (x + 2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y + 5} = \pm(x + 2) \xrightarrow{x < -2} \sqrt{y + 5} = -(x + 2) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow x = -2 - \sqrt{y + 5} \Rightarrow f^{-1} = -2 - \sqrt{x + 5} \quad (0/25)$$

$(0/25)$

(*) توجه: اگر با حل معادله بر حسب x به روش Δ ، ضابطه وارون به دست آید، نمره کامل تعلق گیرد.

پاسخ سوال ۱۱:



(*) توجه: مشق کردن اعداد روی محورهای الزامی است و در صورتی که دانش آموزی اعداد را روی محورهای مشق نکرده، ۵/۰ نمره تعلق گیرد.

پاسخ سوال ۱۲:

$$D_f : \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = x > 3 = (3, +\infty) \quad (0/25)$$

$$D_g : \frac{x}{x-3} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 0 & 3 \\ \hline P & + & - & + \end{array} \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty) \quad (0/25)$$

خیر (۰/۲۵)، توابع f و g باهم مساوی نیستند، زیرا دامنه‌های نابرابری دارند.

پاسخ سوال ۱۳:

الف) باید ابتدا دامنه‌های f و g را بدست آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} \quad (0/25)$$

$$D_g = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \quad (0/25)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g, \quad g(x) \neq 0 = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \quad (0/5)$$

ب)

$$D_g : x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 1\} \Rightarrow f + g = \{(1, 9 + (-1)), (-1, 4 + (-1))\} = \{(1, 8), (-1, 3)\} \quad (0/5)$$

پاسخ سوال ۱۴:

الف)

$$D_g : 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

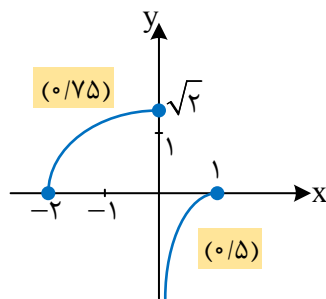
$$D_f : 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq \frac{1}{2} \mid \sqrt{2x-1} \in [-3, 3]\} \quad (۰/۵)$$

$$-3 \leq \sqrt{2x-1} \leq 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 0 \leq 2x-1 \leq 9 \Rightarrow 1 \leq 2x \leq 10 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \leq x \leq 5 \Rightarrow D_{f \circ g} = [\frac{1}{2}, 5] \quad (۰/۵)$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{9 - g^2(x)} = \sqrt{9 - (\sqrt{2x-1})^2} = \sqrt{9 - (2x-1)} = \sqrt{10-2x} \quad (۰/۵) \quad \text{ب)}$$

پاسخ سوال ۱۵:

دامنه: $[-2, 0]$ (۰/۲۵)برد: $[0, \sqrt{2}]$ (۰/۵)

(*) توجه: اگر دانش‌آموزی بُرد را به صورت $(-\infty, \sqrt{2})$ در نظر گرفته باشد، ۰/۲۵ اختصاص یابد.